MA1 – přednáška 9. 11. 2020

(1) „Dodatek" k přednášce minulé (4. 11. 20) – ještě několik příkladů výpočtu derivace funkce:

a) ověření vzorce $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (obecně pro $x>0$, $\alpha\in R$)

[VDSF – označení pro užití věty o derivaci složené funkce]

$$\underline{(x^{\alpha})'} \underset{(def.)}{=} \left(e^{\alpha \ln x}\right)' \underset{VDSF}{=} e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)' = x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

b) připomenutí důležitého vzorce $(\ln(g(x)))' \underset{VDSF}{=} \frac{g'(x)}{g(x)}$ (viz. 4.11.)

(pokud $g(x)>0$ a $g'(x)\in R$):

$$(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{2x}{1+x^2}\,,\quad x\in R$$

(2) a) Derivace funkce, která je součinem tří funkcí:

(a zkusit si zobecnit) (existují-li $f'(x), g'(x), h'(x)$ vlastní)

$$\underline{(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'} = f'(x)(g(x)\,h(x)) + f(x)(g(x)\cdot h(x))' =$$

$$= f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\left(g'(x)\,h(x) + g(x)\cdot h'(x)\right) =$$

$$\underline{= f'(x)g(x)\,h(x) + f(x)\cdot g'(x)\,h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)}$$

Příklad:

$$\underline{(x^3\cdot\ln x\cdot \operatorname{arctg} x)'} = (x^3)'\ln x\cdot\operatorname{arctg}x + x^3(\ln x)'\cdot\operatorname{arctg}x +$$

$$+ x^3\ln x\cdot(\operatorname{arctg}x)' =$$

$$= 3x^2\cdot\ln x\cdot\operatorname{arctg}x + x^3\cdot\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x + x^3\frac{\ln x}{1+x^2}\,,$$

$x\in(0,+\infty)$

b) Derivace funkce, která je složená z více než dvou funkcí

(„zobecnění" vzorce pro derivaci složené funkce – ukážeme si pro funkci složenou ze tří funkcí, dále si promyslete)

$$\left(f(g(h(x)))\right)' \underset{VDSF}{=} f'(g(h(x)))\cdot \left(g(h(x))\right)' \underset{VDSF}{=}$$

$$= f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

(pokud výraz vpravo „má smysl", tj. existují-li vlastní derivace $h'(x)$, $g'(h(x))$, $f'(g(h(x)))$).

Příklad: $$\left(\sqrt{\ln(x^2+2)}\right)' \underset{VDSF}{=} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}}\cdot \ln(x^2+2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}}\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot(x^2+2)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}}\cdot\frac{2x}{x^2+2}\,, \quad x\in\mathbb{R}$$

(3) Při výpočtu derivace funkce se může stát, že derivaci v některém bodě z definičního oboru funkce „nemůžeme" počítat pomocí pravidel pro derivování a tabulky derivací základních funkcí – pak je třeba „prozkoumat", zda v těchto „špatných" bodech derivace existuje, nebo ne – jak? Zatím máme jen definici derivace v bodě (později určitou aplikací derivací dostaneme možná „rychlejší" a někdy i jednodušší nástroj k „dopočítávání" derivací v těchto „špatných" bodech).

Už v minulé přednášce jsme si ukázali, že

$$\left(\sqrt{x}\right)'_{x=0+} = +\infty\,, \quad a \quad \left(\sqrt[3]{x}\right)'_{x=0} = +\infty.$$

A ještě několik dalších příkladů:

a) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$: $\mathcal{D}f = \langle 0, +\infty)$,

derivace dle pravidel (VDSF): $f'(x) = -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pro $x \in (0, +\infty)$;

zbývá vyšetřit derivaci funkce $f(x)$ v bodě $x=0$ zprava:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2(\sqrt{x}) - 1}{x(\cos\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{-(\sin^2\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}}_{\to 1 \text{ (známá limita)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\cos\sqrt{x} + 1)}}_{\to \frac{1}{2}} \underset{AL}{=} -\frac{1}{2};$$

tedy, funkce $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ má v $(0, +\infty)$ oboustrannou derivaci

$f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, a navíc $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, tedy $\mathcal{D}f' = \langle 0, +\infty)$.

b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$: $\mathcal{D}f = \langle 0, +\infty)$, a analogicky k příkladu a):

$$f'(x) \underset{VDSF}{=} \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in (0, +\infty),$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x} - \sqrt{\operatorname{arctg}(0)}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x} = \quad (x > 0\,!)$$

$$= \lim_{x\to 0+} \underbrace{\sqrt{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}}_{\to 1 \text{ (T)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \text{"}1 \cdot \frac{1}{0+}\text{"} \underset{AL}{=} +\infty,$$

tedy, funkce $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$ nemá v bodě $x=0$ zprava

derivaci vlastní (jen nevlastní: $f'_+(0) = +\infty$), tedy $\mathcal{D}f' = (0, +\infty)$.

c) (trošku těžší příklad) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$; $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$,

$$f'(x) \underset{VDSF}{=} \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \ ,$$ ale pozor – pro $x \neq 0$!

Vyšetření derivace funkce f v bodě $x=0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sgn} x} \ (!) \ ,$$

(snažíme se užít limity $\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$) ($\sqrt{x^2} = |x| = x \cdot \operatorname{sgn} x ,\ x \neq 0$)

a pak: $f'_+(0) = \lim_{\substack{x \to 0+ \\ (\operatorname{sgn} x = 1)}} \sqrt{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}} \underset{\substack{VLSF \\ +T}}{=} 1$

a $f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \left(- \sqrt{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}} \right) \underset{VLSF\,+(T)}{=} -1$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ funkce $f(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$ v bodě $x=0$ derivaci oboustrannou nemá, tedy $\mathcal{D}f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} \ln x \ , & \text{pro } x \geq 1 \\ -\ln x \ , & \text{pro } 0 < x < 1 \end{cases}$;

pak $f'(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, +\infty)$ (v tabulce derivací jsou derivace oboustranné)

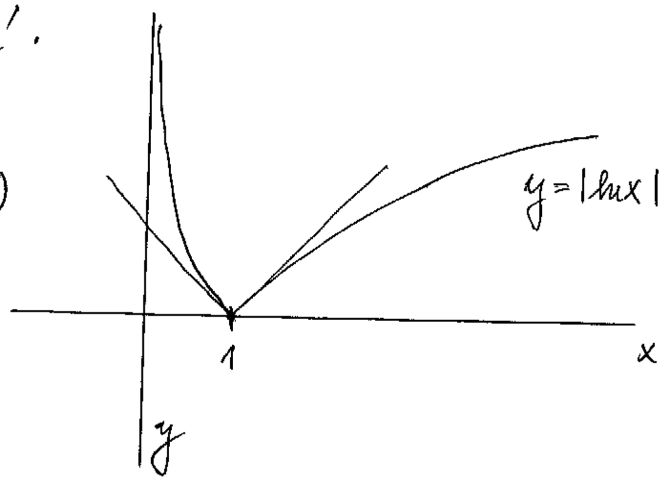
$f'(x) = -\frac{1}{x}$ pro $x \in (0,1)$

a $$f'_\pm(1) = \lim_{x \to 1\pm} \frac{|\ln x|}{x-1} = \lim_{x \to 1\pm} \frac{\ln x \cdot \operatorname{sgn}(\ln x)}{x-1} = \pm 1$$

(opět užíváme, že $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$) ;

tedy funkce $f(x)=|\ln x|$ nemá v bodě $x=1$ oboustrannou derivaci, jen derivace jednostranné.

Náčrtek grafu (a odtud je naše tvrzení „jasné“)



A zkusme ještě derivaci funkce

e) $f(x)=|\ln^3(x)|$, $x\in(0,+\infty)$

opět: $x\in(1,+\infty)$: $f'(x)=(\ln^3(x))' \underset{VDSF}{=} 3\ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}$,

$x\in(0,1)$ $f'(x)=(-\ln^3(x))' = -3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}$,

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|\ln^3(x)|}{x-1}=\lim_{x\to 1}\ln^2(x)\cdot\frac{|\ln(x)|}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\underbrace{\ln^2(x)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\ln(x)}{x-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\operatorname{sgn}x}_{\pm 1}=0 \quad (AL),$$

tedy, $f(x)$ má derivaci pro $x\in(0,+\infty)$! (i v bodě $x=1$).

f) $f(x)=x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x\neq 0$, $f(0)=0$:

funkce f je definována v R, je spojitá v $R\setminus\{0\}$ (zřejmé),

$\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{„}0.\text{omez.“} \underset{VOS}{=} 0$, tedy f je spojitá i v bodě 0;

a dále pro $x\neq 0$ (derivace součinu a VDSF)

$$f'(x)=\left(x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=2x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\neq 0;$$

a $f'(0)$? – opět užitím definice derivace

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(užitím VOS).

Tedy, dle definice derivace můžeme takto „dopočítávat" derivaci i v bodě $x=0$, kde je funkce „dodefinována" hodnotou ($f(0)=0$).

g) derivace funkce $\arcsin x$

pro $x \in (-1,1)$ víme (viz výpočet v přednášce 4.11.), že

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$; a zkusme ještě jednostranné

derivace v bodě $x = 1-$ (a $x=-1+$):

$$(\arcsin x)'_{x=1-} \underset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\arcsin x - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1} =$$

$\left(\begin{array}{c} \text{VLSF} + \\ x = \sin(\arcsin x), \\ tj.\ x = \sin y \Leftrightarrow \\ y = \arcsin x \\ x \in \langle -1,1\rangle \\ y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}\right)$ $= \lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{y-\frac{\pi}{2}}{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{1}{\dfrac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}}} = \dfrac{1}{0+} \underset{\text{(AL)}}{=} \underline{\underline{+\infty}}$

neboť $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}} = (\sin y)'_{y=\frac{\pi}{2}-} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$,

a $\dfrac{\sin y - \sin\frac{\pi}{2}}{y-\frac{\pi}{2}} > 0$ pro $y \to \frac{\pi}{2}-$

Podobně se „spočítá", že i

$$(\arcsin x)'_{x=-\frac{\pi}{2}+} = +\infty\ !$$

(4.) **Derivace funkce vyšších řádů.** (viz přednáška 23.10.)

Definice: Nechť ex. $f'(x) \in R$ v $U(x_0)$. Existuje-li
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$
pak tuto limitu nazýváme druhou derivací (derivací druhého řádu) funkce f v bodě x_0 a značíme $f''(x_0)$ $\left(= \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) - \text{aplikace}\right)$

Definice n-té derivace funkce v bodě x_0 (označujeme $f^{(n)}(x_0)$)

Nechť ex. $f^{(n-1)}(x)$ v $U(x_0)$; ex-li $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0}$, říkáme, že fce f má v bodě x_0 derivaci n-tého řádu (n-tou derivaci) a (značíme tuto derivaci $f^{(n)}(x_0)$)
$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'_{x=x_0} \quad \text{(definice indukcí)}$$

Příklady:

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$, $x \in R$ (23.10.)

2) $(\ln x)'' = ((\ln x)')' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$

$(\ln x)''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-1)(-2) \cdot x^{-3}$, $x \in (0, +\infty)$

obecně: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$, $x \in (0, +\infty)$

3) $(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{1+x^2}$, $x \in R$

4) $(\sin x)''' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$, $x \in R$

(5) Bylo slíbeno několik „lehčích" důkazů
(jako ukázka toho, že rozumíme-li definicím, pak i důkazy můžeme pochopit):

1) Věta: Nechť existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$, pak existuje i
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Důkaz: dle definice derivace:

$$\underline{(f+g)'(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right) \underset{\substack{\text{dle definice} \\ f'(x) \text{ a } g'(x)}}{=}$$

$$= \underline{f'(x) + g'(x)}$$ (což jsme měli ukázat)

2) Věta: Nechť ex. (vlastní) $f'(a)$, $g'(a)$, pak také existuje derivace součinu $(f \cdot g)$ v bodě $\underline{a}$ a platí
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a).g'(a).$$

Důkaz: Máme „vyjádřit" limitu pro výpočet $(f.g)'(a)$, tj.

$$(*) \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a).g(a)}{x-a}$$, přičemž máme

„k použití" $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$;

tyto limity se pak mají „objevit" v limitě (*) a pomocí nich limitu (*) určit (toto je „princip" důkazu našeho řešení).

A jak toto udělat? (budeme limitit jen jednu z funkcí f, g)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\to ?} + f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\to g'(a)} \Big) \overset{*}{=}$$

K výpočtu limity bychom mohli použít pravidla pro výpočet limit (aritmetiku) – jediné, co „chybí", je, že $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ pro důkaz vzorce, tj. že funkce g je spojitá v bodě a.
A to je už začátek poslední části přednášky – aplikace derivace funkce v bodě. Dokážeme si (jako další ukázka důkazů), že platí:

<u>Věta</u>: Nechť f má v bodě <u>a</u> vlastní $f'(a)$. Pak je funkce f v bodě <u>a</u> spojitá.
(Analogicky věta platí pro $f'_+(a)$ a spojitost v $a+$,
($f'_-(a)$ a spojitost f v bodě $a-$)

Pak už snadno dokážeme (pomocí aritmetiky limit), že

$$\overset{*}{\underset{AL}{=}} \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot \lim_{x\to a} g(x) + f(a)\cdot \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= \underline{f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)}$$

(což jsme měli dokázat)

„Hezké" jsou i důkazy věty o derivaci složené funkce a funkce inverzní – pokud bude čas, ukážeme si (napíšu v dodatku k přednášce)